

NOMBRES PREMIERS ET FRACTIONS IRREDUCTIBLES

I. Rappels sur la divisibilité

1) Division euclidienne

Soit a et b deux nombres entiers positifs avec b non nul.

Effectuer la division euclidienne de a par b consiste à trouver les deux entiers q et r qui vérifient :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

Exemple : en effectuant la division euclidienne de 479 par 26, on obtient 18 comme quotient et 11 comme reste. Le reste 11 est inférieur au diviseur 26 et on peut écrire que : $26 \times 18 + 11 = 479$.

2) Multiple et diviseur

Si le reste de la division euclidienne de a par b est **égal à 0**, on dit que :

- a est un multiple de b ,
- a est divisible par b ,
- b est un diviseur de a ,
- b divise a .

Exemple : 35 est un multiple de 5 et de 7. Autrement dit, 5 et 7 sont des diviseurs de 35.

Soit m et p deux nombres entiers positifs.

Si m est un multiple de p , alors il existe un nombre **entier** n tel que $m = n \times p$.

3) Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 s'il est pair.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

II. Nombres premiers

Définition : un nombre **premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : **1 et lui-même**.

Exemples : 11 et 19 sont des nombres premiers. 2 est le seul nombre premier pair.

Remarque : il existe une infinité de nombres premiers.

Propriété : un nombre entier supérieur ou égal à 2 peut toujours se **décomposer en produit de facteurs premiers**.

Exemple : $780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$

Méthode pour obtenir cette décomposition : décomposer le nombre en un produit quelconque puis décomposer à nouveau chacun des facteurs. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste que des nombres premiers.

Remarque : cette décomposition en produit de facteurs premiers s'obtient grâce à la calculatrice (CASIO fx-92 collège) en entrant le nombre puis en tapant sur **EXE**, puis **seconde** **Décomp**.

III. Fractions irréductibles

Définition : une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont **pas de diviseur commun autre que 1**.

Autrement dit, une fraction sera irréductible si on ne peut plus la simplifier.

Pour rendre une fraction irréductible, on peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de nombres premiers.

Exemple :

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Remarque : la calculatrice CASIO rend automatiquement les fractions irréductibles.

Méthode pour obtenir cette décomposition : décomposer le nombre en un produit quelconque puis décomposer à nouveau chacun des facteurs. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste que des nombres premiers.

Remarque : cette décomposition en produit de facteurs premiers s'obtient grâce à la calculatrice (CASIO fx-92 collège) en entrant le nombre puis en tapant sur **EXE**, puis **seconde** **Décomp**.

III. Fractions irréductibles

Définition : une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont **pas de diviseur commun autre que 1**.

Autrement dit, une fraction sera irréductible si on ne peut plus la simplifier.

Pour rendre une fraction irréductible, on peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de nombres premiers.

Exemple :

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Remarque : la calculatrice CASIO rend automatiquement les fractions irréductibles.