THEOREME DE PYTHAGORE

I. Définition et théorème :

Définition : Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est toujours le plus long côté, il s'appelle l'hypoténuse.

Exemple : si le triangle ABC est rectangle en B, l'hypoténuse est [AC].

On a : $AC > AB$ et $AC > BC$.

De plus, on a : $AC < AB + BC$ (car le plus court trajet pour aller de A à C est la ligne droite).

Problématique : comment calculer (sans mesurer) la longueur de l'hypoténuse ?

Voir activité faite en classe.

Enoncé du théorème de Pythagore :

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple : si le triangle EFG est rectangle en G (l'hypoténuse est donc [EF]), alors on aura :

$EF^2 = EG^2 + FG^2$. C'est l'égalité de Pythagore.

Cela permettra de calculer la longueur d'un des trois côtés du triangle à condition de connaître les deux autres.

II. Applications :

1) Calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

Considérons le triangle BMX rectangle en B tel que BM = 4,5 cm et BX = 6 cm.

Calculons la longueur MX :

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle BMX rectangle en B (l'hypoténuse est [MX]) :

$MX^2 = BM^2 + BX^2$

$MX^2 = 4{,}5^2 + 6^2$

$MX^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$ (*aire du grand carré dans l'activité*)

$MX = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ (*côté du carré dans l'activité*)

L'hypoténuse [MX] mesure 7,5 cm.

Remarque : on dit que (4,5 ; 6 ; 7,5) est un triplet Pythagoricien.

Le plus connu est le triplet (3 ; 4 ; 5) en lien avec la corde à 13 nœuds.

2) Calcul d'un des côtés de l'angle droit dans un triangle rectangle :

Considérons le triangle USB rectangle en B tel que BU = 7,5 cm et US = 12,5 cm.

Calculons la longueur BS :

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle USB rectangle en B (l'hypoténuse est [US]) :

$US^2 = BS^2 + BU^2$

$12{,}5^2 = BS^2 + 7{,}5^2$

$156{,}25 = BS^2 + 56{,}25$ (*c'est une addition à trou*)

$BS^2 = 156{,}25 - 56{,}25 = 100$ (*on fait la soustraction*)

$BS = \sqrt{100} = 10$

Le côté de l'angle droit [BS] mesure 10 cm.

Remarque : très souvent, on devra arrondir le résultat obtenu.

III. Réciproque du théorème de Pythagore :

Quand on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle, on peut donner la nature de ce triangle (en particulier savoir si c'est un triangle rectangle ou non).

- En effet, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle !

- Si l'égalité de Pythagore est vérifiée, alors le triangle est rectangle. Pour cela, on admettra que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.
  En effet, **si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.**

Méthode à suivre pour déterminer si un triangle est rectangle ou non :

a) On cherche le plus long côté du triangle et on calcule le carré de sa longueur.

b) Puis on calcule la somme des carrés des deux autres longueurs.

c) Enfin on vérifie si on a obtenu les mêmes résultats. On peut alors conclure.

Exemple 1 : Considérons le triangle FUN tel que FU = 6 cm ; UN = 9 cm ; FN = 5 cm.

a) Le plus long côté est le côté [UN] et $UN^2 = 9^2 = 81$.

b) $FU^2 + FN^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

c) $81 \neq 61$ On n'a pas obtenu les mêmes résultats.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle FUN n'est pas rectangle.

Exemple 2 : Considérons le triangle FAR tel que FA = 2,4 cm ; AR = 1,8 cm ; FR = 3 cm.

a) Le plus long côté est le côté [FR] et $FR^2 = 3^2 = 9$.

b) $FA^2 + AR^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9$

c) On a obtenu les mêmes résultats.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FAR est rectangle en A.